SESSION DE 1979

MATHÉMATIQUES

Options T et TA

Épreuve n° 2 (problème)

DURÉE : 3 heures

La troisième partie est indépendante des deux premières.

Les candidats sont invités à répondre à chaque question posée avec rigueur et concision.

PREMIÈRE PARTIE

On considère l'équation différentielle E_1 :

$$(E_1) \qquad (1-x^2)\,y'' - 2xy' + \alpha y = 0$$

où y est une fonction réelle inconnue, 2 fois continûment dérivable, de la variable réelle x, et α une constante.

1° On impose les conditions supplémentaires $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ et on cherche les solutions développables en série entière.

Écrire la relation de récurrence permettant de déterminer les coefficients (que l'on ne cherchera pas à calculer explicitement) et vérifier qu'il y a unicité de la solution.

Dans le cas où α n'est pas de la forme $\alpha = 2k\,(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, déterminer le rayon de convergence.

Que se passe-t-il si $\alpha = 2k\,(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$?

2° Reprendre le même problème dans le cas où on impose $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Quelles sont les valeurs exceptionnelles de α ?

3° Montrer que si $\alpha = n\ (n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ il existe une unique fonction polynôme L_n vérifiant les conditions suivantes :

L_n est de degré n;

Le coefficient du terme de degré n de L_n est 1;

L_n est solution de E_1.

Quelle est la parité de la fonction L_n ?

Expliciter L_n pour $n = 0, 1, 2, 3$.

DEUXIÈME PARTIE

On se propose de chercher des fonctions $f : (u, v) \longmapsto f(u, v)$ deux fois continûment différentiables sur $]0, +\infty[\times]0, \pi[$ vérifiant la condition :

$$(E_2) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(u^2 \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{1}{\sin v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin v \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0$$

1° Soient F et G deux fonctions réelles définies respectivement sur $]0, \infty[$ et $]0, \pi[$.

On suppose que pour tout $u \in]0, \infty[$ et tout $v \in]0, \pi[$, $F(u) = G(v)$.

Montrer que F et G sont constantes.

2° On cherche des solutions de E_2 de la forme $f(u, v) = g(u) \times h(v)$.

Montrer que g est solution d'une équation de la forme :

$$(E_3) \qquad \frac{d}{du}\left(u^2 \frac{d}{du} g(u)\right) - \mu\, g(u) = 0$$

où μ est une constante arbitraire.

Déterminer l'équation correspondante E_4 vérifiée par h.

On suppose désormais que $\mu = p(p+1)$ $p \in \mathbb{N}$.

3° Résoudre E_3 en cherchant des solutions de la forme u^γ, $\gamma \in \mathbb{R}$.

4° Effectuer dans l'équation E_4 le changement de variable défini par $w = \cos v$.

En utilisant I, en déduire une solution particulière de E_4.

Expliciter la solution particulière de E_2 obtenue pour $p = 3$.

TROISIÈME PARTIE

1° a étant un réel strictement supérieur à 1, montrer que

$$\iiint_K \frac{du\ dv\ dw}{\sqrt{u^2 + v^2 + (w-a)^2}} = \frac{4\pi}{3a}$$

avec

$$K = \{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1 \}$$

il pourra être commode de faire le changement de variable défini par

$$u = r \cos\theta \sin\lambda \quad v = r \sin\theta \sin\lambda \quad \text{et} \quad w = r \cos\lambda$$

On considère maintenant l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne définie par

$$\| (x, y, z) \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\mathbb{R}^3$ sera aussi considéré comme un espace affine sur lui-même, le vecteur nul étant choisi comme origine et noté 0.

Soient

$$\mathcal{B} = \{ M \in \mathbb{R}^3 \mid \| \overrightarrow{OM} \| \leqslant 1 \} \quad \text{et} \quad \Omega = \{ M \in \mathbb{R}^3 \mid \| \overrightarrow{OM} \| > 1 \}$$

Pour tout point P de Ω on pose

$$V(P) = \iiint_{\mathcal{B}} \frac{dx\ dy\ dz}{\| \overrightarrow{MP} \|}$$

x, y et z désignant les coordonnées du point M qui décrit $\mathcal{B}$.

2° Soit $P \in \Omega$ et P_0 le point de coordonnées $(0, 0, \| \overrightarrow{OP} \|)$.

Montrer que $V(P) = V(P_0)$ et calculer $V(P_0)$.

3° Montrer que V est continûment différentiable sur Ω.

Calculer $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}}\ V$.

Calculer div $\vec{W}$.

4° Calculer le flux de $\vec{W}$ à travers la surface Σ dans les 2 cas suivants :

a. Σ est la sphère de centre O, de rayon $R > 1$ orientée vers l'extérieur.

b. Σ est la surface d'équation $x^2 + 4y^2 + z^2 - 24y + 32 = 0$ orientée au choix du candidat.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail